<u>Секция “Изток” – СМБ</u>

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 10.12.2011 г.

12. клас

Време за решаване 120 минути.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име ……………………………………………училище………………….град…………………

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, то:

А) $a=1$; Б) $a=2$; В) $a=3\sqrt{3}$; Г) друг отговор.

2. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2-6x+1=0$, то изразът $x_1^2+x_2^2$ е равен на:

А) 18; Б) 24; В) 34; Г) друг отговор.

3. Произведението на модата и медианата на данните $4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 11,\ 9,\ 7,\ 6$ е:

А) 12; Б) 15; В) 20; Г) друг отговор.

4. Ако за аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е известно, че $a_7+a_{12}=8$, то сборът на първите осемнадесет члена на прогресията е:

А) 72; Б) 36; В) 48; Г) друг отговор.

5. Ако $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$, то $cos\alpha$ е:

А) 1; Б) $\dfrac{5}{4}$; В) $\dfrac{3}{10}$; Г) друг отговор.

6. От 6 различни химикалки и 5 различни моливи са направени подаръци от две химикалки и три моливи. Броят на възможните различни подаръци е равен на:

А) 120; Б) 180; В) 150; Г) друг отговор.

7. Броят на естествените числа, които са решения на неравенството $\sqrt{x+5}\le 1+\sqrt{5}$ е:

А) 5; Б) 3; В) 4; Г) друг отговор.

8. Окръжностите k_1 и k_2 се допират външно. Окръжността k_1 има радиус 6. От центъра O на k_2 е прекарана права, която се допира до k_1 в точката A и $OA=8$. Дължината на радиуса на k_2 е равен на:

А) 3; Б) 4; В) $2\sqrt{2}$; Г) друг отговор.

9. Даден е правоъгълен трапец $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ с основа $AB=16$, бедро $BC=14$ и диагонал $AC=10$. Дължината на малката основа CD е:

А) $4\sqrt{2}$; Б) 4; В) 5; Г) друг отговор.

10. Бедрото на равнобедрен триъгълник е 48, а радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $R=36$. Дължината на височината към основата е:

А) 24; Б) 38; В) 28; Г) друг отговор.

11. Даден е равнобедреният триъгълник ABC $(AC = BC)$ с $AB = 6cm$. Ако височината CD $\left(D \in AB\right)$ е $4cm$, то височината AN $\left(N \in BC\right)$ е:

А) $5cm$; Б) $\frac{24}{5}cm$; В) $\frac{3}{5}cm$; Г) друг отговор.

12. Даден е равнобедреният трапец $ABCD$ $\left(AB \parallel CD\right)$. Голямата му основа AB има дължина $3cm$ и $\sphericalangle ADC = 120^{\circ}$. Ако в трапеца може да се впише окръжност, то радиусът на тази окръжност е :

А) $1cm$; Б) $\frac{\sqrt{2}}{2}cm$; В) $2cm$; Г) друг отговор.

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с 3 точки

13. Ако (x, y) е решение на системата $\left| \begin{array}{l} x + y = 8 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{array} \right.$, да се намери на колко е равно произведението xy.

Отговор:. . . . .

14. Катетите на правоъгълен триъгълник са $3cm$ и $7cm$. Да се намери дължината на ъглополовящата на правия ъгъл на триъгълника.

Отговор:. . . . .

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

15. Ако $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, да се намери стойността на израза $\sqrt{\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}}$.

16. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{array} \right.$

17. От върха D на тъпия ъгъл на ромба $ABCD$ са спуснати $DP \perp AB$ $\left(P \in AB\right)$ и $DQ \perp BC$ $\left(Q \in BC\right)$. Ако $DP = DQ = a$ и $PQ = b$, да се намери лицето на ромба.

ОТГОВОРИ

1. б). 2. в). 3. в). 4. а). 5. г $\frac{4}{5}$). 6. в). 7. а). 8. б). 9. в). 10. г 32). 11. б). 12. г $\frac{\sqrt{3}}{2}$). 13. 15. 14. $\frac{21\sqrt{2}}{10}cm$. 15 . $\frac{24}{25}$. 16. $x_1=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$, $y_1=-1$; $x_2=\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$, $y_2=-1$;

$x_3=\frac{7-\sqrt{21}}{14}$, $y_3=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$; $x_4=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$, $y_4=\frac{7-\sqrt{21}}{14}$.

17. $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2-b^2}}$.

РЕШЕНИЯ

15. $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}$. От $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$ получаваме $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Тогава $\sqrt{\frac{1-\cos 4\alpha}{2}}=\sqrt{\sin^2 2}\alpha=|\sin 2\alpha|$. От $\pi\le 2\alpha\le 2\pi$ следва $\sin 2\alpha\le 0$ и $|\sin 2\alpha|=-\sin 2\alpha$ $=-2\sin\alpha\cos\alpha=-2\frac{4}{5}(-\frac{3}{5})=\frac{24}{25}$

16. Преобразуваме дадената система и получаваме

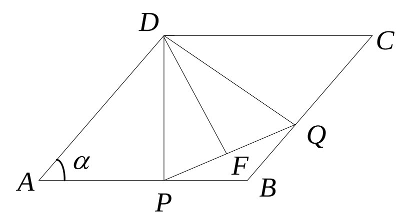
$$\left|\begin{array}{l} x^2-5xy+y^2=0 \\ x+xy+y^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2-5xy+y^2=0 \\ x(1+y)=(1+y)(1-y) \end{array}\right.$$

1. А**ко** $1+y=0$, т.е. $y=-1$, от първото уравнение на системата получаваме $x^2+5x+1=0$, откъдето $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.Тогава решенията на системата са $x_1=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$, $y_1=-1$; $x_2=\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$, $y_2=-1$.

2. А**ко** $1+y\neq 0$, получаваме системата $\left|\begin{array}{l} x^2-5xy+y^2=0 \\ x=1-y \end{array}\right.$, откъдето намираме

$x_3=\frac{7-\sqrt{21}}{14}$, $y_3=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$; $x_4=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$, $y_3=\frac{7-\sqrt{21}}{14}$.

17. Означаваме $RBAD=\alpha$.Тогава $RPDQ=\alpha$. Построяваме $DF\perp PQ$ $(F\in PQ)$ и от правоъгълния триъгълник PFD намираме $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{PF}{DP}=\frac{b}{2a}$.



Тогава от

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ намираме

$\sin\alpha=2\frac{b}{2a}\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2}}=\frac{b}{2a^2}\sqrt{4a^2-b^2}$.

От правоъгълния $\triangle APD$ имаме $\dfrac{DP}{AD} = \sin\alpha$, откъдето $AD = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Тогава

$$S_{ABCD} = AD^2 \sin\alpha = = \frac{a^2}{\sin\alpha} = \frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$$