

СМБ – Секция ”ИЗТОК”
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 16.04.2011 г.
9 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка зад. от 1 до 15 има само един верен отговор. „Друг отговор“ се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите са разделени на групи по трудности: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки; от 6 до 10 – с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

1. Изразът $\left(a : \frac{a^3}{6a+7} - 1\right) : \frac{(a+1)}{a^2}$ е тъждествено равен на:

- А) $4a$ Б) $7-a$ В) $1-a$ Г) друг отговор

2. Даден е трапецът $ABCD$ с основи $AB = 7$ и $CD = 3$. Разстоянието между средите на диагоналите му е:

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) друг отговор

3. Корените на уравнението $\frac{x+9}{x^2-3x-10} - \frac{x+15}{x^2-25} = \frac{1}{x+2}$ са:

- А) -5 и 8 Б) 5 и -8 В) -8 Г) друг отговор

4. Ако за числата x_1 и x_2 е изпълнено $x_2 + x_1 = -1$ и $x_1 x_2 = -2$ то x_1 и x_2 са корените на уравнението:

- А) $x^2 - x + 2 = 0$ Б) $x^2 + x - 2 = 0$ В) $x^2 + x + 2 = 0$ Г) друг отговор

5. Допустимите стойности (ДС) на израза $\frac{\sqrt{x+3}}{4x^2-5x+1}$ са:

- А) $x \geq -3$ Б) $x \geq 3$ В) $x \neq \frac{1}{4}; 1$ Г) друг отговор

6. Броят на различните корените на уравнението $|x^2 - 6x + 4| = 5$ е:

- А) 4 Б) 3 В) 2 Г) друг отговор

7. Даден е $\triangle ABC$. Права през A дели медианата CM ($M \in AB$) в отношение 1:3 считано от C . Отношението в което тази права дели бедрото BC считано от B е равно на:

- А) 6:1 Б) 7:1 В) 1:3 Г) друг отговор

8. Корените на уравнението $2 - \sqrt{5x} + \sqrt{2x-1} = 0$ са:

- А) 5 и $\frac{5}{9}$ Б) 1 В) 5 Г) друг отговор

9. Ако x и y са решения на системата $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}$, то стойността на произведението xy е:

- А) 6 Б) ± 36 В) 13 Г) друг отговор

10. Дадена е окръжност $k(O; R)$. Ако $OM = 3R$, то дължината на допирателната MT към окръжността е:

- А) $2R$ Б) $3R$ В) $2\sqrt{2}R$ Г) друг отговор

11. Стойността на израза $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ е:

- А) $2\sqrt{2}$ Б) 2 В) $4\sqrt{2}$ Г) друг отговор

12. $\triangle ABC$ е вписан в окръжност с радиус $R = 9$. Ако $AC = 12$ и $BC = 15$, то височината CH е:

- А) 13 Б) 8 В) 9 Г) друг отговор

13. Сборът от корените на уравнението $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$ е:

- А) 1 Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) друг отговор

14. Хордата, съединяваща допирните точки до бедрата на вписаната в равнобедрен трапец окръжност, е 16см. Ако радиуса на окръжността е 10см, то лицето на трапеца е:

- А) 540 Б) 500 В) 300 Г) друг отговор

15. Правоъгълник има периметър 36см. Сборът от лицата на квадратите, построени външно върху страните му е 340cm^2 . Дължините на страните на правоъгълника са:

- А) 6 и 9 Б) 12 и 10 В) 10 и 8 Г) друг отговор

Отговори 9 клас:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Б 7-a	А 2	В $x = -8$	Б	$x \in [-3; \frac{1}{4}) \sqcup (\frac{1}{4}; 1) \sqcup (1; +\infty)$ Г)	Б 3	А 6:1	В 5	Г 36	В $2\sqrt{2}R$	Б 2	Г 10	В $\frac{2}{3}$	Б 500	Г 11;7

Кратки решения:

$$1) \left(a \cdot \frac{6a+7}{a^3} - 1 \right) \cdot \frac{a^2}{(a+1)} = \left(\frac{6a+7}{a^2} - 1 \right) \cdot \frac{a^2}{(a+1)} = \left(\frac{6a+7-a^2}{a^2} \right) \cdot \frac{a^2}{(a+1)} = \left(\frac{-(a-7)(a+1)}{a^2} \right) \cdot \frac{a^2}{(a+1)} = 7-a$$

$$2) \text{ Разст. } PQ = \frac{a-b}{2} = 2.$$

$$3) -5 \notin DC \text{ и реш. е само } -8$$

4)

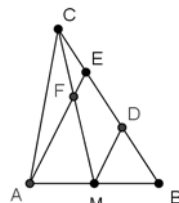
$$5) x+3 \geq 0 \text{ и } 4x^2 - 5x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \in [-3; \frac{1}{4}) \sqcup (\frac{1}{4}; 1) \sqcup (1; +\infty)$$

$$6) 1\text{сл. } x^2 - 6x + 4 = 5 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow 2 \text{ реш.}$$

$$2\text{сл. } x^2 - 6x + 4 = -5 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow 1 \text{ реш.}$$

\Rightarrow общо 3 реш.

$$7) \text{ Построяваме } MD \parallel AE \text{ от } CF:FM=1:3 \Rightarrow CE:DE=1:3 \Rightarrow CE=x, DE=3x. \text{ CM медиана } \Rightarrow AM:BM=1:1 \Rightarrow BD:DE=1:1 \Rightarrow BD=DE=3x \Rightarrow BE:EC=6x:x=6:1.$$



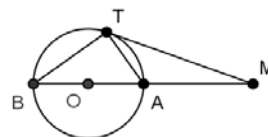
Може и с Теорема на Менелай.

$$8) 2 + \sqrt{2x-1} = \sqrt{5x} ; DC : x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 4 + 4\sqrt{2x-1} + 2x - 1 = 5x \Rightarrow 4\sqrt{2x-1} = 3x - 3 \Rightarrow DC : x \geq 1$$

$$\Rightarrow 16(2x-1) = 9x^2 - 18x + 9 \Rightarrow x_1 = 5 \in DC; x_2 = \frac{5}{9} \notin DC.$$

$$9) \text{ Полагаме } \begin{cases} \sqrt{xy} = v \\ x + y = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 7 \\ u^2 - v^2 = 133 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v + 7 \\ (v+7)^2 - v^2 = 133 \end{cases} \Rightarrow v = 6 \Rightarrow \sqrt{xy} = 6 \Rightarrow xy = 36.$$

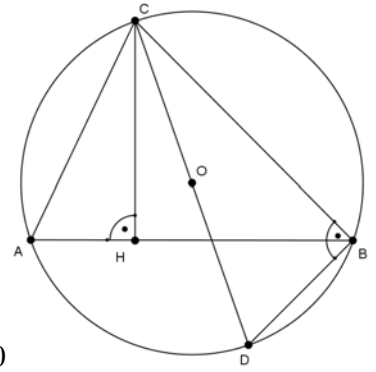
$$\Delta BMT \approx \Delta TMA \Rightarrow TM^2 = MA \cdot MB \Rightarrow TM^2 = 2R \cdot 4R \Rightarrow TM = 2\sqrt{2}R$$



10)

$$11) \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}+4-3-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4-3+2\sqrt{2}}{9-8} = 2$$

$$\Rightarrow \triangle AHC \approx \triangle DBC \Rightarrow$$

 \Rightarrow


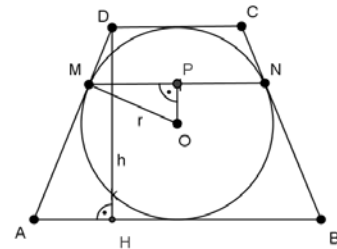
12) Построяваме диаметър CD

$$AC:DC=HC:BC \quad HC=10$$

13) Полагаме $3x^2 - 2x + 8 = y \Rightarrow \sqrt{y+7} + \sqrt{y} = 7 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$.

14) От $ABCD$ описан $\Rightarrow AB + CD = AD + BC$. Построяваме DH височина $\Rightarrow DH = 2r = 20cm$.
Построяваме $OP \perp MN \Rightarrow MP = NP = 8cm$. $\triangle AHD \approx \triangle OPM \Rightarrow HD : PM = AD : OM \Rightarrow AD = 25cm$.

$$\Rightarrow AB + CD = 2.25cm. \Rightarrow S_{ABCD} = 50.20 : 2 = 500cm^2$$



15) Ако x и y са страните на правоъгълника $\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ 2x^2 + 2y^2 = 340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 18 \\ (x + y)^2 - 2xy = 170 \end{cases} \Rightarrow (11; 7)$.