

СМБ – Секция "ИЗТОК"
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 16.04.2011
8 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. 15 тестови задачи са разделени на групи по трудности: от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки; от 6 до 10 – с по 5 точки и от 11 до 15 – с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

1 зад. Корените на уравнението $x^2 - 3x - 4 = 0$ са:

- а) 3 и 4 б) 4 и 2 в) 4 и -1 г) друг отговор

2 зад. Дължините на страните на триъгълник са прости числа и две от тях са 7 и 13. Какъв е триъгълник, ако дължината на третата му страна е едноцифрено число?

- а) равнобедрен б) равнобедрен в) правоъгълен г) друг отговор

3 зад. Решете системата:

$$\begin{cases} (x+2)(y-3) = xy \\ (x-1)(y+3) = xy \end{cases}$$

- а) (3; 11) б) (2; 9) в) (4; 7) г) друг отговор

4 зад. Ако $a^2 = 2 - a$, то a^3 е равно на:

- а) 1 б) 8; -1 в) -8; 1 г) друг отговор

5 зад. Триъгълникът ABC е допълнен до успоредник $ABDC$. Ако G е медицентър на $\triangle ABC$ и $AG = 4$ см, намерете дължината на диагонала AD .

- а) 10 б) 12 в) 16 г) друг отговор

6 зад. Да се реши двойното неравенство: $-4x \leq 11x - 12 < 3x$

- а) $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$ б) $x \in \left[\frac{3}{5}; \frac{3}{2}\right]$ в) $x \in \left[\frac{4}{5}; \frac{3}{2}\right)$ г) друг отговор

7 зад. Изразът $\sqrt{125} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \sqrt{21.8.7.6} + 4\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$ е равен на:

- а) $8\sqrt{5} + 78$ б) $72 + 5\sqrt{5}$ в) 86 г) друг отговор

8 зад. В правоъгълен триъгълник един от ъглите е равен на 15° , а хипотенузата е равна на 12 см. Да се намери разстоянието от медицентъра на триъгълника до хипотенузата.

- а) 3 см б) 2 см в) 1 см г) друг отговор

9 зад. Намерете стойностите на параметъра k , за които уравнението $(k+1)x^2 + x - 1 = 0$ има два различни реални корена.

- а) $k \neq 0$ б) $0 < k < 1$ в) $k > 5/4$ г) друг отговор

10 зад. Точките A, B, C, D в посочения ред лежат върху окръжност с център O . Дадени са мерките на следните ъгли: $\angle ABO = 40^\circ, \angle BCO = 30^\circ, \angle DAO = 55^\circ$. Мярката на $\angle COD$ е равна на:

- а) 70° б) 80° в) 100° г) друг отговор

11 зад. Даден е равнобедрен трапец $ABCD (AB \parallel CD, AB > CD)$. Диагоналът BD разполовява $\angle B$, а двата диагонала разделят средната основа на три равни части. Ако бедрото на трапеца е равно на 3 см, да се намери периметъра му.

- а) 15 см б) 12 см в) 24 см г) друг отговор

12 зад. Числата a и b удовлетворяват три от написаните равенства $a - b = 43, a + b = 63, ab = 392, \frac{a}{b} = 8$, но

не удовлетворяват четвъртото. Числото a е равно на:

- а) 53 б) 7 в) 56 г) друг отговор

13 зад. Точката P лежи на страната CD на успоредника $ABCD$. Точките M и N са среди съответно на отсечките AP и BD . Намерете отношението $DP:PC$, ако $MN:AB = 1:4$.

- а) 1:2 б) 1:1 в) 1:3 г) друг отговор

14 зад. Дадени са функциите $f(x) = (3x-1)(3x+1) - (1-3x)^2$ и $g(x) = a(x-2)^2 - a(x-2)(x+2) + 5$

Определете a , така че уравненията $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ и $g(3x) = 1$ да са еквивалентни.

- а) $-1/3$ б) $3/4$ в) $-2/5$ г) друг отговор

15 зад. Опростете израза: $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$

- а) $a-b$ б) $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$ в) 2 г) друг отговор

Отговори 8 клас:**1в; 2б; 3г (4;9); 4в; 5б; 6в; 7а; 8в; 9г** $k \in (-1,25 ; -1) \cup (-1; +\infty)$; **10а; 11а; 12в; 13б; 14в;****15 г** $-(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})$.**Решения:****2 зад.** третата страна е по-голяма от 6 и едноцифрено просто число \Rightarrow е равна на 7**3 зад.** непосредствено**4 зад.** $a^2 = 2 - a \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -2$ **5 зад. зад** Ако О е пресечна точка на диагоналите на успоредника ABDC, АО е медиана в $\triangle ABC$ и

$$AO = \frac{3}{2} AG = 6 \text{ см} \Rightarrow AD = 12 \text{ см}.$$

6 зад. Двойното неравенство се представя като система линейни неравенства, която се решава непосредствено.**7 зад.** Упътване: Трябва да се има в предвид, че: $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-1$ **8 зад.** Нека триъгълника е ABC ($\angle C = 90^\circ, \angle B = 15^\circ$), като CH е височина към хипотенузата, G е медицентър на триъгълника, а GP е перпендикуляр към страната AB. Тогава $CH = \frac{1}{4} AB = 3 \text{ см}$ и

$$GH = \frac{1}{3} CH = 1 \text{ см}$$

9 зад $k \neq 1$ $D > 0, D = 5 + 4k \Rightarrow k > -1,25 \Rightarrow k \in (-1,25 ; -1) \cup (-1; +\infty)$ **10 зад.** Като се има в предвид, че триъгълниците AOB, BOC и AOD са равнобедрени

$$\angle AOD = 70^\circ \quad \angle AOB = 100^\circ \quad \angle BOC = 120^\circ \quad \text{и} \quad \angle COD = 360^\circ - (70^\circ + 100^\circ + 120^\circ) = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ.$$

11 зад. Упътване: $\angle ABD = \angle CBD, \angle ABD = \angle BDC \Rightarrow \triangle BDC$ - равнобедрен ($BC = CD$) и $AB = 2CD$.**12 зад.** От I и II $\Rightarrow a = 53; b = 10$ но $53 \cdot 10 \neq 392; \frac{53}{10} \neq 8 \Rightarrow$ едното от I и II е грешно от III и IV

$$\Rightarrow a = 8 \cdot b \Rightarrow 8 \cdot b^2 = 392 \Rightarrow b^2 = 49 \Rightarrow b = 7; a = 56 \Rightarrow \text{I равенство не е вярно.}$$

13 зад. В триъгълника APC M и N са среди съответно на AP и AC $\Rightarrow MN$ е средна отсечка и

$$MN = \frac{1}{2} PC, \text{ но } MN = \frac{1}{4} AB \text{ и } AB = CD \Rightarrow PC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD \Rightarrow PC = DP \Rightarrow DP : PC = 1 : 1.$$

14 зад. $f(x) = 6x - 2 \quad g(x) = -4ax + 8a + 5$

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 6x + 1 \quad 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6} \quad g(3x) = -12ax + 8a + 5 \quad -12ax + 8a + 5 = 1$$

$$-3ax + 2a + 1 = 0 \quad \text{при } x = -\frac{1}{6} \quad a = -\frac{2}{5}.$$

15 зад. Очевидно $a < 0, b < 0$ Тогава $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} = \frac{-(-a+2\sqrt{ab}-b)}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} =$

$$\frac{-\left[(\sqrt{-a})^2 + 2\sqrt{-a}\sqrt{-b} + (\sqrt{-b})^2\right]}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} = \frac{-(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} = -(\sqrt{-a}+\sqrt{-b}).$$