

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 26.04.2011г.**12 клас****Времето за решаване е 120 минути.****Организаторите Ви пожелават успех!****ПЪРВА ЧАСТ**

Всяка задача има само един верен. “Друг отговор ” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки:

1зад. Корените на уравнението $\sqrt{5x+1} = x-1$ са:

- а) 0 и 7; б) 6; в) -7; г) друг отговор

2зад. Стойността на израза $4x^3 - 8x^2 + 2x + 3$ за $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ е равна на:

- а) 0 б) 1 в) 3 г) друг отговор

3зад. При кои стойности на a параболата $y = 2x^2 - x + a$ и правата $y = 3x - 1$ имат точно една обща точка?

- а) -1 б) 1 в) 10 г) друг отговор

4зад. В интервала $[1; 2]$ намаляваща функция е:

- а) $f(x) = x^2 + 8$ б) $f(x) = -2x^2 + 4x$ в) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ г) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

5зад. Всички стойности на a , за които системата $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$ има единствено решение са:

- а) ± 2 б) $\pm \sqrt{2}$ в) 3 г) друг отговор

6зад. Ако $\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha} = 2$, то $\operatorname{tg} \alpha$ е равно на:

- а) -1 б) $-\frac{1}{3}$ в) $\frac{1}{3}$ г) друг отговор

7зад. Графиката на функцията $f(x) = -x^2 + bx + c$ минава през точките $A(-2; 0)$ и $B(0; 6)$. Най-голямата стойност на функцията е:

- а) 9 б) 6 в) 5,75 г) друг отговор

8зад. Допирната точка на една от страните на ромб с окръжността, вписана в ромба дели тази страна на отсечки от 1 см и 4 см. Тангенсите на ъглите на ромба са:

- а) $\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}$ б) $\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}$ в) $\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}$ г) друг отговор

9зад. Около квадрат със страна 10 е описана окръжност и в един от получените отрезки е вписан квадрат. Дължината на страната му е:

- а) 3 б) 2 в) 1 г) друг отговор

10зад. Ако ъгълът между страните на триъгълника, които са равни на 4 и 6, е 120° , то ъглополовящата на този ъгъл е:

- а) 2,4 б) 4 в) 6 г) друг отговор

11зад. Точката E е вътрешна за правоъгълника $ABCD$. Ако $DE = 3$ и $BE = 7$, намерете $AE^2 + CE^2$.

- а) 32 б) 43 в) 72 г) друг отговор

12зад. Кой от следните изрази може да е вероятност на събитие?

- а) $\log_{0,3} 3$ б) $\sin \frac{\pi}{4}$ в) $(0,5)^{-2}$ г) $\operatorname{tg} 46^\circ$

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се напише.

Задачите се оценяват с по 3 точки:

13зад. Намерете втория член на растяща аритметична прогресия, за която сборът на първите 10 члена е равен на 300, а първият, вторият и петият член в този ред образуват геометрична прогресия.

Отговор:

14зад. Решете уравнението $\frac{|x-3|}{|x-2|-1} = 1$

Отговор:

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите три задачи трябва да се опише подробно решението.

Задачите се оценяват с по 10 точки:

15зад. Намерете най-малката цяла стойност на a , за която корените на уравнението $x^2 + (a+2)x + 3a + 1 = 0$ са реални и сборът от квадратите им е по-малък от $5a + 8$.

16зад. В триъгълник е вписана окръжност, центърът на която е свързан с върховете му. Лицата на получените триъгълници са 28 cm^2 , 60 cm^2 и 80 cm^2 . Да се намерят страните на триъгълника.

17зад. Върху хипотенузата AB на правоъгълния триъгълник ABC са нанесени точки M и N така, че $AM = MN = NB$. Ако $CM = CN \sqrt{2}$, да се намери $\sin \angle BAC$.

Отговори и кратки решения

Първа част:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.
Г 7	В	Б	Б	Б	Б	Г 6,25	А	Б	А	Г 58	Б

Втора част:

13зад. $a_2 = 9$

14зад. $x \in (3; +\infty)$

Трета част:

15зад. За изразяване на $D = a^2 - 8a \geq 0$ и намиране $a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$

2 точки

За изразяване на $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 5a + 8$

2 точки

За решаване на $a^2 - 7a - 6 < 0$ и намиране $a \in \left(\frac{7 - \sqrt{73}}{2}; \frac{7 + \sqrt{73}}{2}\right)$

3 точки

За намиране $a = 0$

3 точки

16зад. За изразяване $\frac{ar}{2} = 28; \frac{br}{2} = 60; \frac{cr}{2} = 80$

2 точки

За намиране чрез почленно деление на горните равенства $a : b : c = 7 : 15 : 20$

3 точки

За означаване $a = 7x; b = 15x; c = 20x$

2 точки

За намиране след заместване в Хероновата формула за лице на V на $x = 2$

2 точки

За намерени страни $a = 14; b = 30; c = 40$

1 точка

17зад. Означаваме $BC = a; AM = MN = NB = x; CN = y; CM = y\sqrt{2}; \angle BAC = \alpha; \angle ABC = \beta$.

За $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{3x}$

2 точки

За прилагане на косинусова теорема за $\triangle CNB$ и $\triangle CMB$ и получаване на системата

$$\begin{cases} y^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \beta \\ 2y^2 = a^2 + 4x^2 - 4ax \cos \beta \end{cases}$$

3 точки

След умножаване на първото уравнение с -2 , събиране и преобразуване, намираме $\frac{a}{x} = \sqrt{2}$

4 точки

За намиране $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

1 точка

II начин:

От формулата за медианите получаваме (при същите означения):

$$\text{За } \triangle ANC \text{ Ю } 2y^2 = \frac{1}{4}(2y^2 + 2b^2 - 4x^2)$$

$$\text{За } \triangle MBC \text{ Ю } y^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2(y\sqrt{2})^2 - 4x^2$$

$$\text{След преобразуване се получава системата } \begin{cases} 3y^2 + 2x^2 = 2b^2 \\ 2x^2 = a^2 \end{cases}$$

От $\frac{a}{3x} = \sin \alpha$ Ю $a = 3x \sin \alpha$. След заместване във второто уравнение на системата се получава $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$