

Секция “Изток” – СМБ
ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 18.04.2015 г.
12 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Имеучилище.....град.....

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор” се приема за решение само ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Числената стойност на израза $(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2$ е равна на:

- A) 100 Б) 25 В) 2 Г) 1

2. Коя от следните двойки $(x; y)$ принадлежи на дефиниционната област на дробта $\frac{x-y}{xy+x^2y}$?

- A) $(0;5)$ Б) $(-3;0)$ В) $(-2;-2)$ Г) $(-1;5)$

3. Ако $\lg 4 = k$ и $\lg 3 = p$, то $\lg 18$ е равно на:

- A) $k+3p$ Б) $k+\frac{p}{2}$ В) $\frac{k}{2}+p$ Г) $\frac{k}{2}+2p$

4. Решенията на неравенството $\frac{x^2-2x-3}{3x^2} \leq 0$ са:

- A) $x \in [-1;0) \cup (0;3]$ Б) $x \in [-3;1]$ В) $x \in [-3;0) \cup (0;1]$ Г) $x \in [-1;3]$

5. Коя от наредените двойки $(x; y)$ е решение на системата $\begin{cases} -x+y=1 \\ -x^2+y^2=5 \end{cases}$?

- A) $(1;2)$ Б) $(2;3)$ В) $(-2;-3)$ Г) $(1;-2)$

6. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0$, то стойността на $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ е:

- A) $-2\sqrt{2}$ Б) 2 В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. Броят на реалните корени на уравнението $(x^4 - 16)^2 \sqrt{x} = 0$ е:

- A) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

8. Стойността на израза $4 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ е:

А) 4

Б) $4 - \cos 2\alpha$

В) $3 + \cos 2\alpha$

Г) 3

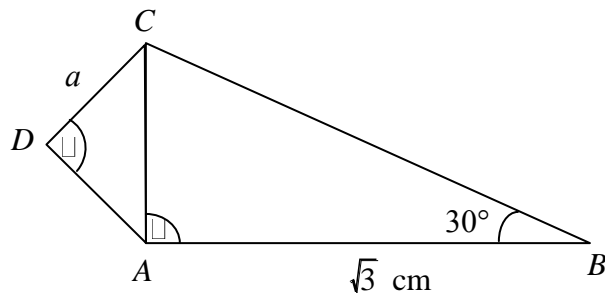
9. Катетът AC на правоъгълния $\triangle ABC$ е хипотенуза на равнобедрения правоъгълен триъгълник $\triangle ACD$. Стойността на a в сантиметри е:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

В) $\sqrt{2}$

Г) $\frac{\sqrt{6}}{4}$



10. Два от ъглите на един триъгълник са 81° и 39° , а радиусът на описаната около него окръжност е $10\sqrt{3}$ cm. Дължината на средната по големина страна на този триъгълник в сантиметри е:

А) 60

Б) 40

В) 30

Г) 20

11. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm са построени графиките на функциите $f(x) = x^2 + x - 5$ и $g(x) = 7$. Точка A е обща точка за двете графики и лежи във втори квадрант. Колко сантиметра е разстоянието от точка A до ординатната ос?:

А) 7

Б) 5

В) 4

Г) 3

12. Първият ред на киносалон с 18 реда има 29 места, а всеки следващ – с 2 повече. Колко са местата в киносалона?

А) 684

Б) 828

В) 1334

Г) 524

13. Редицата $5; 3; \frac{9}{5}; \frac{27}{25}; \dots$ е геометрична прогресия. Десетият член на тази редица е:

А) $\frac{3^9}{5^8}$

Б) $\frac{3^8}{5^8}$

В) $\frac{3^9}{5^9}$

Г) $\frac{3^{10}}{5^9}$

14. Вероятността по случаен начин в думата БЪЛГАРИЯ да се подчертае гласна буква е:

А) 0,25

Б) 0,4

В) 0,5

Г) 1

15. Дадено е следното множество от данни 7, 5, 4, 6, 4, 2, 8, 5, 4. Средноаритметичното на модата и медианата е:

А) 4

Б) 4,5

В) 5

Г) 5,5

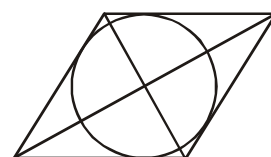
16. Страната на ромб е $2\sqrt{2}$ cm и острият му ъгъл е 45° . Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:

А) 1 cm

Б) $\sqrt{2}$ cm

В) 2 cm

Г) $2\sqrt{2}$ cm

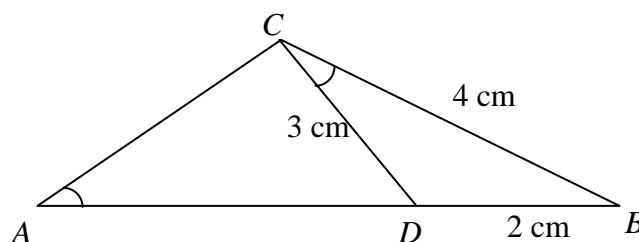


17. Лицето на ромб е два пъти по-малко от лицето на квадрат със същия периметър. На колко е равен по-големият ъгъл на ромба?

- А) 175° Б) 150° В) 135° Г) 120°

18. На чертежа, D е точка от отсечката AB и $\angle CAB = \angle DCB$. Колко сантиметра е периметърът на $\triangle ADC$?

- А) 18
Б) 15
В) 13
Г) 9

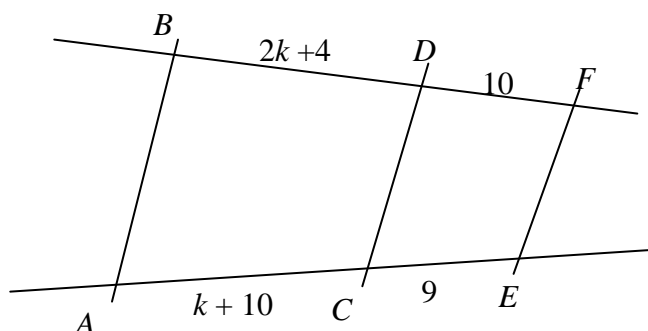


19. Равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) има основи $AB=6$, $CD=4$ и бедро $BC=5$. Стойността на $\cos \angle BAC$ е:

- А) $\frac{2\sqrt{6}}{6}$ Б) $\frac{5}{6}$ В) $\frac{6}{7}$ Г) $\frac{5}{7}$

20. За коя стойност на k отсечките AB , CD и EF са успоредни?

- А) 6
Б) 8
В) 16
Г) 16



Отговорите на задачите от 21. до 25. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Графиката на квадратната функция минава $f(x) = x^2 + px + q$ през точките $A(0; 6)$ и $B(3; 0)$. Да се намери сборът на коефициентите p и q .

22. Ако x е с 20% по-голямо от y и y е с 20% по-малко от z , то колко е $\frac{x+y}{z}$?

23. Дължините на страните на правоъгълен триъгълник са последователни членове на геометрична прогресия. Ако по-малкият катет е равен на $\sqrt{2}$, да се намери другият катет.

24. Даден е триъгълникът ABC със страни $AC=1$, $BC=3$ и $\angle ACB=120^\circ$. Да се намери дължината на ъглополовящата през върха C .

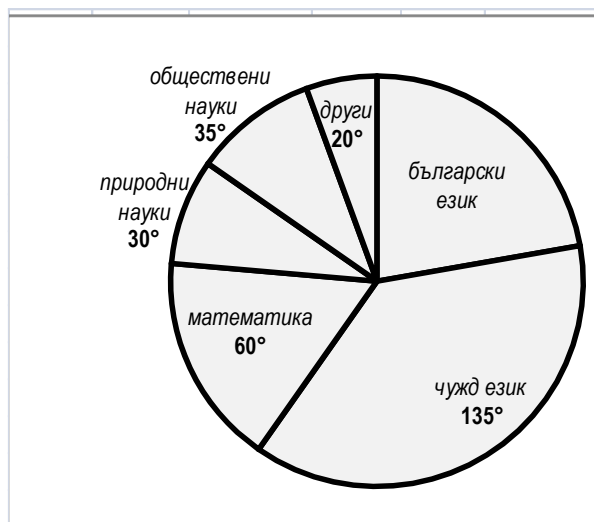
25. Средно аритметичното на 4 числа е 6 и средно аритметичното на 6 други числа е 4. На колко е равно средно аритметичното на тези 10 числа?

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се реши уравнението $\frac{(y^2 + 2y - 4)^2 - 7(y^2 + 2y - 4) + 12}{y^2 + 2y} = 0$

27. В училище работят 72 учители. Кръговата диаграма показва разпределението им по предмети.

Да се пресметне вероятността случайно срещнат от тях учител да преподава природни науки и да се намери по колко различни начина може да се сформира екип от трима учители – един по български език, един по математика и един по обществени науки.



28. Една от височините на триъгълник го разделя на две части с лица 54 cm^2 и 30 cm^2 . Страната, към която е построена височината, се дели от нея на отсечки, едната от които и с 4 cm по-дълга от другата. Да се намери отношението на радиуса на описаната окръжност към радиуса на вписаната в този триъгълник окръжност.

ЛИСТ С ОТГОВОРИ

Въпроси с избираем отговор

1. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

2. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

3. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

4. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

5. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

6. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

7. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

8. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

9. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

10. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

11. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

12. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

13. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

14. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

15. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

16. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

17. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

18. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

19. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

20. ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г

Въпроси със свободен отговор

21.

22.

23.

24.

25.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n(n-1)\dots 3.2.1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$$h_c^2 = a_1b_1 \quad r = \frac{a+b-c}{2} \quad \sin a = \frac{a}{c} \quad \cos a = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} a = \frac{a}{b} \quad \operatorname{cotg} a = \frac{b}{a}$$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos b \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos g \quad \frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin g} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin g$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin a$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin j$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

a°	0°	30°	45°	60°	90°
$a \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg} a$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - a$	$90^\circ + a$	$180^\circ - a$
sin	$-\sin a$	$\cos a$	$\cos a$	$\sin a$
cos	$\cos a$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$
tg	$-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$
cotg	$-\operatorname{cotg} a$	$\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{cotg} a$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad \operatorname{ctg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \mp 1}{\operatorname{ctg} b \pm \operatorname{ctg} a}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \quad \operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2 \operatorname{ctg} a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \quad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2} \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

РЪКОВОДСТВО ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача	Правилен отговор	Максимален бал
1	В	2
2	В	2
3	Г	2
4	А	2
5	Б	2
6	Б	2
7	Б	2
8	А	2
9	А	2
10	В	2
11	Г	2
12	Б	2
13	А	2
14	В	2
15	Б	2
16	Г	3
17	Б	3
18	Б	3
19	Г	3
20	В	3
21	1	5
22	$\frac{44}{25} \left(= 1\frac{19}{25} \right)$	5
23	$\sqrt{1+\sqrt{5}}$	5
24	0,75 или $\frac{3}{4}$	5
25	4,8	5
26	$\pm\sqrt{3}; 2; 4-1;$	<p style="text-align: center;">Общо 10 точки</p> <p>За свеждане на уравнението в числителя до квадратно – 1 точка</p> <p>За решаване на квадратното уравнение – 2 точки</p> <p>За намиране на корените на биквадратното уравнение – 3 точки</p> <p>За намиране на корените на уравнението в знаменателя – 2 точки</p> <p>За изключване на –2 (или за определяне на ДО) – 2 точки</p>
27	$\frac{1}{12}$ или 0,083...; 1342 (=16.12.7)	<p style="text-align: center;">Общо 10 точки</p> <p>За намиране на броя на учителите по пр. науки – 1 точка</p> <p>За определяне на вероятността – 1 точка</p> <p>За намиране на отношението 5° – 1 учител – 2 точки</p> <p>За намиране на броя на учителите по БЕ – 2 точки</p> <p>За намиране на броя на учителите по математика и ОН – 2 точки</p> <p>За пресмятане на съединението – 2 точки</p>

28	32 : 65	<p style="text-align: center;">Общо 10 точки</p> <p>За намиране на страната, която се дели от височината, $a = 14$ – 3 точки</p> <p>За намиране на останалите страни 13 и 15 на триъгълника – 2 точки</p> <p>За намиране на радиуса 4 на вписаната окръжност – 2 точки</p> <p>За намиране на радиуса $\frac{65}{8}$ на описаната окръжност – 2 точки</p> <p>За изчисляване на отношението – 1 точка</p>