СМБ – Секция "Изток"
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 15.12.2019 г.
11 клас и 12 клас

Времето за решаване е 120 минути.
Организаторите Ви пожелават успех !

Име…………………………………………….училище…………….................град…………...

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка задача има само един верен отговор. „Друг отговор" се приема за решение само, ако е отбелязан верен резултат. Задачите се оценяват с по 2 точки.

1. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-4x-7=0$, то стойността на израза $A=x_1(x_2-1)-x_2$ е равна на:

а) – 11 б) –3 в) 3 г) друг отговор

2. Стойността на израза $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^3}$ е:

а) 0 б) $4-2\sqrt{5}$ в) $2\sqrt{5}$ г) друг отговор

3. Дадена е петчленна геометрична прогресия 2; a; b; c; $\frac{81}{8}$. Произведението abc е:

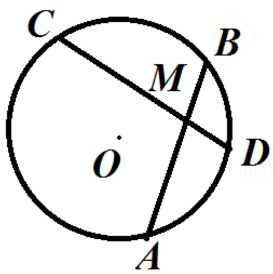
а) $\frac{9}{2}$ б) $\frac{27}{4}$ в) $\frac{81}{4}$ г) друг отговор

4. Кое от числата може да бъде вероятност на събитие?

а) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$ б) $\sqrt{2}$ в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ г) $2-\sqrt{5}$

5. Решенията на неравенството $(x+4)(x-3)\le 0$ са:

а) интервал с дължина 7 б) обединение на два безкрайни интервала;
в) интервал с дължина 1 г) друг отговор.



6. В окръжност с център O на чертежа, хордите AB и CD се пресичат в точка M. Ако $AM.MB = 48$ и $CM:MD = 3:1$, то дължината на CD е равна на:

а) 16 б) 4
в) 12 г) друг отговор

7. Дадени са числата $a=3^{\log_9 2}$, $b=2\sin 135°$, $c=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$. Кое от твърденията е вярно?

а) $a\neq b=c$ б) $a=b\neq c$ в) $a=b=c$ г) a, b и c са различни

8. В правоъгълен трапец е вписана окръжност с радиус $r = 4$ cm. Ако едно от бедрата на трапеца е равно на 10 cm, то голямата му основа е равна на:

а) 6 cm б) 8 cm в) 10 cm г) друг отговор

9. Равнобедрен триъгълник е вписан в окръжност с $R = 8$ cm. Разстоянието от центъра на окръжността до бедрото е равно на $4\sqrt{3}$ cm. Основата на триъгълника е равна на:

а) $4\sqrt{3}$ cm б) 8 cm в) $8\sqrt{3}$ cm г) друг отговор

10. Стойностите на реалното число k, за които решението на неравенството $(x-1)(x^2-2x+k)\ge 0$ е обединение на един краен и един безкраен интервал са:

а) $k\ge 1$ б) $k = 1$ в) $k < 1$ г) друг отговор

ВТОРА ЧАСТ

Следващите две задачи са със свободен отговор, който трябва да се запише. Задачите се оценяват с по 5 точки.

11. Страните на триъгълник имат дължини 10 cm, 14 cm, и 18 cm. Дължината на ъглополовящата на средния по големина ъгъл е равна на:

Отговор ……………….

12. Числото 2020 = $2^2.5.101$. Всичките му делители (включително 1 и 2020) са подредени в нарастваш ред. Кое число е на седмо място в редицата?

Отговор …………………

ТРЕТА ЧАСТ

На следващите две задачи трябва да се напише подробно решението. Задачите се оценяват с по 10 точки.

13. Дадени са функциите $f(x)=x^2-2x+5$ и $g(x)=\sqrt{9-(x-1)^2}$.

а) Намерете най-малката стойност на $f(x)$ и най-голямата стойност на $g(x)$.

б) Решете уравнението $f(x)=g(x)+1$.

14. $ABCD$ е правоъгълен трапец $(AB \parallel CD, AD \perp CD)$ и $\measuredangle ABC = 60°$. Дължините на голямата основа AB, диагонала AC и бедрото BC образуват аритметична прогресия. Ако CD = 4 cm, намерете дължините на страните на трапеца и неговите диагонали.

Първа част

1	2	3	4	5
А	А	Г $\frac{729}{8}$	В	А
6	**7**	**8**	**9**	**10**
А	Б	Г – 12 cm	В	В

Втора част

11. $3\sqrt{15}$ **12.** 101

Трета част

13зад.

Оценяване: **а) 4 точки**

За $f(x)$ $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$ <u>*1 точка*</u>

$f_{\min} = f(1) = 4$ <u>*1 точка*</u>

$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 9-(x-1)^2 \leq 9$ <u>*1 точка*</u>

$g(x) \leq \sqrt{9} \leq 3 \Rightarrow g_{\max} = 3$ <u>*1 точки*</u>

б) 6 точки

I начин:

$f(x) \geq 4$, а $g(x)+1 \leq 4$ <u>*2 точки*</u>

Равенство е възможно само при $f(x) = g(x)+1 = 4$ <u>*1 точка*</u>

И двете стойности са достигат при $x = 1$ <u>*1 точка*</u>

Уравнението има единствен корен $x = 1$ <u>*2 точки*</u>

II начин:

Уравнението е равносилно на $x^2 - 2x + 4 = \sqrt{8 - x^2 + 2x}$ <u>*1 точка*</u>

Полагаме $t = x^2 - 2x \Rightarrow t + 4 = \sqrt{8-t}$ <u>*2 точки*</u>

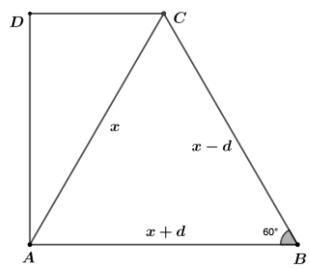
Получаваме след повдигане на втора степен

$t^2 + 9t + 8 = 0$ <u>*1 точка*</u>

$t = -1$ е единствено решение <u>*1 точка*</u>

Уравнението има единствен корен $x = 1$ <u>*1 точка*</u>

14 зад. Разглеждаме ΔABC Срещу $\angle ACB = 60^\circ$ лежи средната по големина страна Нека $AC = x$, тогава другите две страни са $x - d$ и $x + d$. От косинусова теорема



$$x^2 = (x+d)^2 + (x-d)^2 - 2(x-d).(x+d).\cos 60^\circ$$

$$x^2 = x^2 + 2xd + d^2 + x^2 - 2xd + d^2 - 2\left(x^2 - d^2\right)\frac{1}{2} \Rightarrow d^2 = 0.$$

ΔABC е равностранен. От правоъгълния ΔADC с ъгъл 30° получаваме $AB = BC = CA = 2.CD = 8$ cm, $AD = AC\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

От правоъгълния $\Delta ADB \Rightarrow BD^2 = AD^2 + AB^2 = 48 + 64 = 112 \Rightarrow BD = 4\sqrt{7}$

Оценяване:

Доказване, че ΔABC е равностранен <u>*6 точки*</u>

Намиране на $AB = BC = CA$ <u>*2 точки*</u>

Намиране на BD <u>*2 точки*</u>