Секция “Изток” – СМБ

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 27.04.2024 г.

10 клас

Темата е по формата на НВО

Време за работа: 90 минути

1. Стойността на израза $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}+\left(2-\sqrt{7}\right)^2+\frac{2}{\sqrt{7}}$ е равна на:

А) $9+\frac{19}{7}\sqrt{7}$ Б) $13-\frac{33}{7}\sqrt{7}$ В) $13+\frac{23}{7}\sqrt{7}$ Г) $9-\frac{19}{7}\sqrt{7}$

2. $ABCD$ е успоредник. Точка M лежи на страната BC и я разделя в отношение 1:3, считано от върха B. Ако $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ насочената отсечка $\overrightarrow{DM}$ изразена чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е равна на:

А) $\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$ Б) $\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ В) $\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$ Г) $\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

3. В остроъгълния триъгълник $\triangle ABC$ е построена височината CD ($D\in AB$) и $AD:DB=1:2.$ Точка M е от височината CD и я дели в отношение 3:2, считано от върха C. Правата AM пресича страната BC в точка N. Отношението от дължините на отсечките AM и MN е равно на

А) $\frac{2}{3}$ Б) $\frac{3}{2}$ В) $\frac{9}{4}$ Г) $2:1$

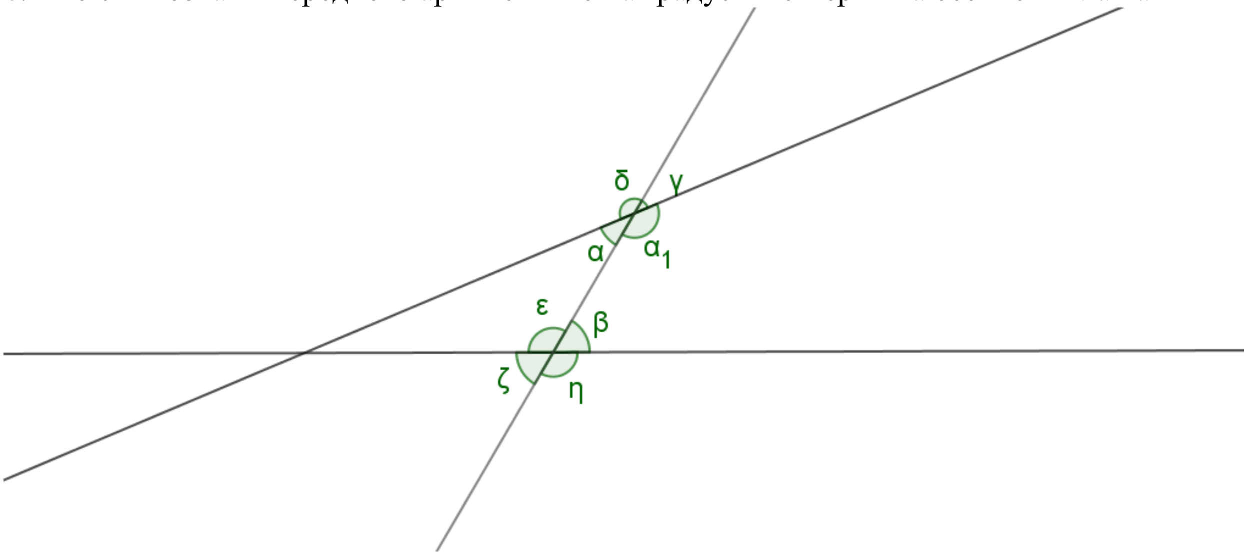
4. Точките M, N *и* P са среди съответно на страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$. Намерете отношението $S_{MNP}:S_{ABC}$

А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{4}$ Б) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{4}{1}$

5. Диагоналите $AC=12$ cm и $BD=5$ cm на трапеца ABCDса взаимноперпендикулярни. Средната основа на трапеца в сантиметри е равна на:

А) 6,5 Б) 8,5 В) 3,5 Г) $\frac{\sqrt{119}}{2}$

6. Ако с $\overline{X}$ означим средното аритметично на градусните мерки на осемте ъгъла на



чертежа , кое от следните твърдения е вярно за $\overline{X}$:

А)180 ° Б) $90° < \overline{X} < 180°$ В) $\overline{X} = 90°$ Г) $45° < \overline{X} < 90°$

7. Кое от следните твърдения за корените на уравнението $4x^2 + 4\sqrt{3}x - 5 = 0$ **не** е вярно?

А) $x_1 + x_2 = -\sqrt{3}$ Б) $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{11}{2}$ В) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{22}{5}$ Г) $x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{27}{4}\sqrt{3}$

8. Намерете разликата между най- голямата и най- малката стойност на функцията $y = -x^2 - 2x + 5$ в интервала $[-4;0]$.

А) 9 Б) 2 В) 10 Г) 1

9. В един шкаф има 6 черни и 6 бели чорапи. Каква е вероятността при случайно изваждане на два от тях да се получи чифт (двата чорапа да са едноцветни) ?

А) $\dfrac{5}{11}$ Б) $\dfrac{6}{11}$ В) $\dfrac{2}{11}$ Г) $\dfrac{3}{11}$

10. Отношението на катетите в правоъгълен триъгълник е $a:b = 3:4$. Хипотенузата има дължина 20 cm. Ъглополовящата l_b има дължина (в сантиметри)

А) $\dfrac{16}{3}\sqrt{10}$ Б) $6\sqrt{5}$ В) $\dfrac{48}{7}\sqrt{2}$ Г) $4\sqrt{13}$

11. Страните на триъгълник са 8 cm, 15 cm и 17 cm. Радиусът на вписаната в него окръжност е:

А) 3,5 cm Б) 1,5 cm В) 2 cm Г) 3 cm

12. Пресметнете стойността на израза $\dfrac{\sin^2(90° - \alpha) - \sin^2\alpha}{tg\alpha - \cot g\alpha}$, ако $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$ и $\alpha \in (90°;180°)$.

А) $-\frac{\sqrt{155}}{36}$ Б) 1 В) $-\frac{\sqrt{31}}{6}$ Г) $\frac{\sqrt{155}}{36}$

13. Намерете косинуса на двустенния ъгъл при основата на правилна четириъгълна пирамида, всички ръбове на която са равни.

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ г) $\frac{1}{2}$

14. Намерете десетия член на аритметична прогресия, ако сумата на **n** нейни члена е $S_n = 3n^2 - n$

А) 524 Б) 56 В) 76 Г) 38

15. Разстоянията от точка на вътрешността на равностранен триъгълник до страните му са 3 cm, 4 cm и 5 cm. Лицето на триъгълника е

А) $8\sqrt{3}$ Б) $36\sqrt{3}$ В) $48\sqrt{3}$ Г)72

Пълните решения с необходимите обосновки на на задачи 16 и 17 запишете в листа за отговори на указаните за това места

16. А) Решете уравнението $x^2 - x - \sqrt{3x^2 - 3x + 13} = 5$

Б) Решете неравенството $\frac{3x-2}{x^2-3x+9} - \frac{2}{x+3} \geq \frac{3x-13}{x^3+27}$

В) Обосновете кои от корените на уравнението са решение на неравенството.

17. За триъгълник са дадени $a = 16$ cm , $r = 6$ cm, $R = 17$ cm. Намерете другите две страни.

Ключ с верните отговори 10 клас

№ на задача	Отговор	Брой точки
1	Г	4
2	А	4
3	Б	4
4	Б	4
5	А	4
6	В	4
7	Г	4
8	А	4
9	А	4
10	Б	4
11	Г	4
12	Г	4
13	В	4
14	Б	4
15	В	4
16		Общо 20 точки
16А)	Полагаме $x^2 - x = y$. Получаване на $y - \sqrt{3y+13} = 5$ Свеждане до квадратно уравнение $y^2 - 13y + 12 = 0$ и решаване $y_1 = 1$ и $y_2 = 12$ Отхвърляне на $y_1 = 1$ Решаване $x^2 - x = 12.$ и получаване на $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$	1 точка 1 точка 4 точки 1 точка 1 точка
16 Б)	Определяне на допуст. стойности $x \neq -3$ Преобразуване до вида $\dfrac{x^2+10x-11}{(x+3)(x^2-3x+9)} \geq 0$ намиране на $x \in [-11;-3) \cup [1;+\infty)$	2 точки 4 точки 4 точки
16В)	$x = -3$ не е решение на неравенството $x = 4$ е решение е решение	1 точка 1точка
17		Общо 20 точки
17	Получаване на уравнението $3(16+b+c) = \dfrac{4bc}{17}$ Получаване на $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ Получаване на $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ или $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$	1 точка 1 точка 1 точка

	I случай: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ Получаване на $256 = b^2 + c^2 - 2bc.\frac{15}{17}$ Съставяне на системата $\begin{vmatrix} b+c = \frac{4bc}{51} - 16 \\ b^2 + c^2 - \frac{30bc}{17} = 256 \end{vmatrix}$ Свеждане до еквивалентната система $\begin{vmatrix} b+c = 64 \\ bc = 1020 \end{vmatrix}$ Решаване на системата и получаване на $(b,c) = (34;30)$ или $(30;34)$. II случай: $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$ Получаване на системата $\begin{vmatrix} b+c = \frac{4bc}{51} - 16 \\ b^2 + c^2 + \frac{30bc}{17} = 256 \end{vmatrix}$ Свеждане до еквивалентна система $\begin{vmatrix} b+c = 19 \\ bc = 446,25 \end{vmatrix}$ Установяване, че системата няма решение.	1 точка 1 точка 5 точки 3 точки 1 точка 4 точки 2 точки

Примерно решение на задача 16.

А) Полагаме $x^2 - x = y$. Решаваме ирационално уравнение с неизвестно y

$$y - \sqrt{3y+13} = 5, \qquad (1)$$

което се свежда до квадратното уравнение $y^2 - 13y + 12 = 0$ с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = 12$. Непосредствената проверка или допустимите стойности $(y \geq 5)$ показват, че само $y_2 = 12$ е решение на (1). От

$$x^2 - x = 12.$$

получаваме $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$.

Б) Преобразуваме неравенството до вида $\frac{x^2 + 10x - 11}{(x+3)(x^2 - 3x + 9)} \geq 0$,чиито решения са

$x \in [-11;-3) \cup [1;+\infty)$

В) $x_1 = -3$ не решение на неравенството, защото е недопустима стойност. Само $x_2 = 4$ е решение, тъй като $4 \in [1;+\infty)$

С непосредствено заместване с $x_2 = 4$ в неравенството $\frac{3x-2}{x^2-3x+9} - \frac{2}{x+3} \geq \frac{3x-13}{x^3+27}$ се получава вярното числово неравенство $\frac{44}{91} \geq -\frac{1}{91}$, което потвърждава горния извод.

Примерно решение на задача 17:

Прилагайки формулите за лице на триъгълник $S = p.r$ и $S = \frac{a.b.c}{4R}$ получаваме $3(16+b+c) = \frac{4bc}{17}$.

От синусова теорема намираме $\sin\alpha = \frac{8}{17}$. От $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ получаваме $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ или $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$

I случай: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$. От косинусова теорема за страната a намираме

$256 = b^2 + c^2 - 2bc.\frac{15}{17}$. За страните на триъгълника b и c получаваме системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} b+c = \frac{4bc}{51} - 16 \\ b^2 + c^2 - \frac{30bc}{17} = 256 \end{array} \right. \qquad (1)$$

От първото уравнение на системата намираме $b^2 + c^2 = \frac{16b^2c^2}{51^2} - \frac{230bc}{51} + 256$ и замествайки във второто уравнение достигаме до $bc = 1020$. Системата (1) е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} b+c = 64 \\ bc = 1020 \end{array} \right.$$

от която получаваме $(b,c) = (34;30)$ или $(30;34)$.

II случай. $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$. Аналогичната система на (1) е $\left| \begin{array}{l} b+c = \frac{4bc}{51} - 16 \\ b^2 + c^2 + \frac{30bc}{17} = 256 \end{array} \right.$, която е еквивалентна на

$\left| \begin{array}{l} b+c = 19 \\ bc = 446,25 \end{array} \right.$. Последната система няма реални решения.